Kapitel 11

Arithmetische Schaltkreise

Wiederholung:

Sei $a = a_{n-1} \dots a_0$ eine Folge von Ziffern,

$a_i \in \{0,1\}$

Binärdarstellung: $<a> = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i$

Zweierkomplement: $[a_n a_{n-1} \dots a_0] = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i - a_n 2^n$

Rechenregel: $-[a] = [\overline{a}] + 1$

mit $\overline{a} = \overline{a}_n \overline{a}_{n-1} \dots \overline{a}_0$

Addierer

Gegeben: 2 positive Binärzahlen $<a> = <a_{n-1} \dots a_0>$,

$<b> = <b_{n-1} \dots b_0>$,

Eingangsübertrag $c \in \{0,1\}$

Gesucht: Schaltkreis, der Binärdarstellung s von

$<a> + <b> + c$ berechnet

Wegen $<a> + <b> + c \leq 2 \cdot (2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$

genügen n+1 Ausgänge des Schaltkreises.

Definition 11.1

Ein **n-Bit Addierer** ist ein Schaltkreis, der die folgende Boolesche Funktion berechnet:

$+_n : \mathbf{B}^{2n+1} \to \mathbf{B}^{2n+1}$,

$(a_{n-1}, \dots, a_0, b_{n-1}, \dots, b_0, c) \to (s_n, \dots, s_0)$ mit

$<s> = <s_n \dots s_0> = <a_{n-1} \dots a_0> + <b_{n-1} \dots b_0> + c$

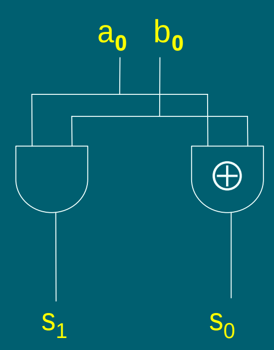
Beispiel

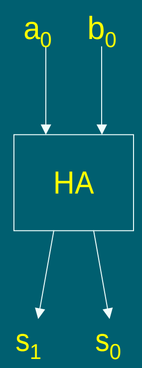
Addieren nach der Schulmethode:

$$
\begin{array}{r}
1\,0\,1\,1 \\
+\quad 0\,1\,1\,0 \\
+ {\scriptstyle 1\ 1\ 1\ 0}\ 0 \\
\hline
1\,0\,0\,0\,1
\end{array}
$$

Eingangsübertrag

Schaltkreis eines Halbaddierers

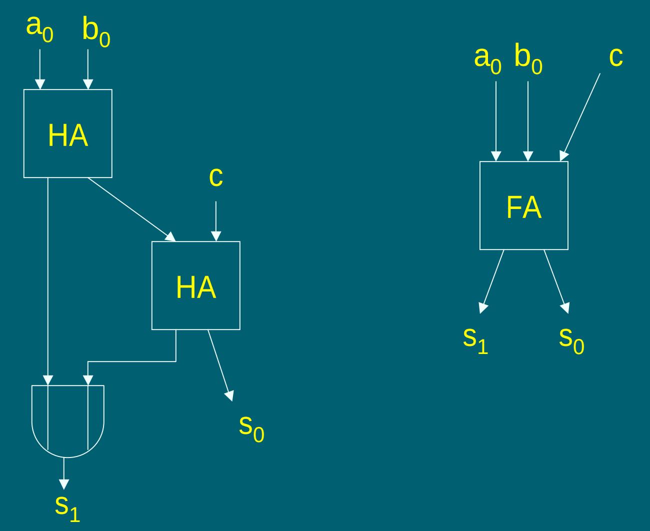




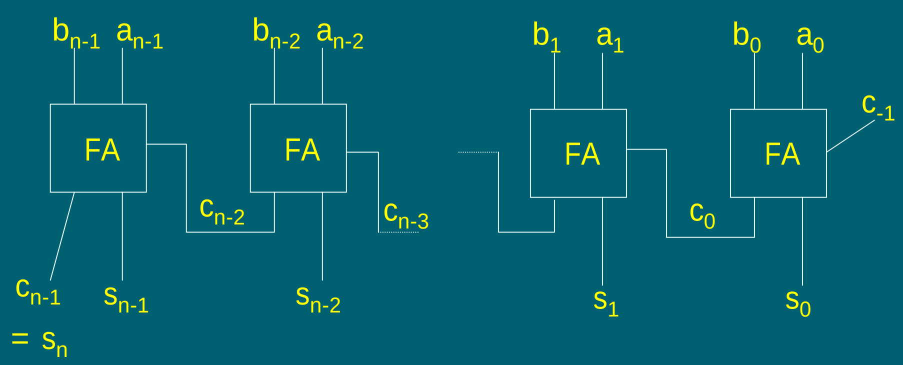
dabei:

C(HA) = 2, depth(HA) = 1

Schaltkreis eines Volladdierers

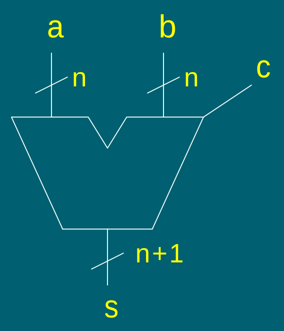


Aufbau eines Carry Ripple Addierers



Komplexität eines Carry Ripple Addierer

Schaltbild eines n-Bit-Addierers:



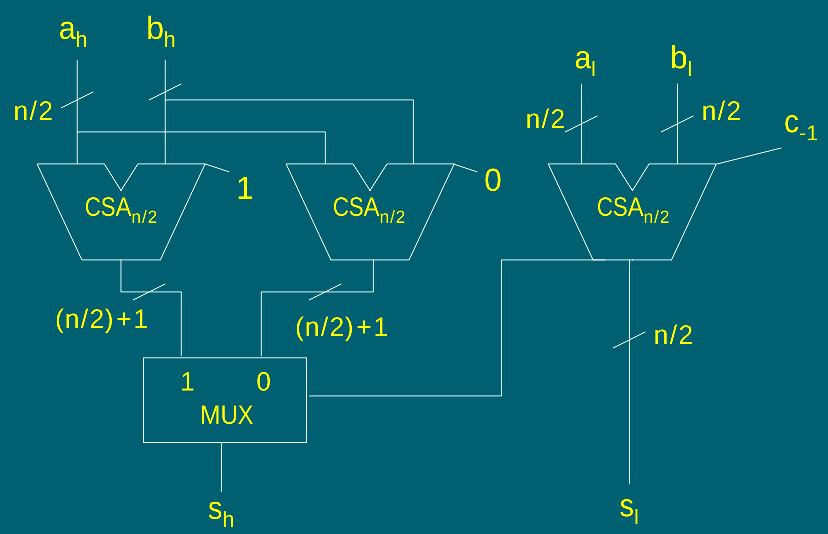
Kosten eines CR_n:

$C(CR_n) = n \cdot C(FA) = 5n$

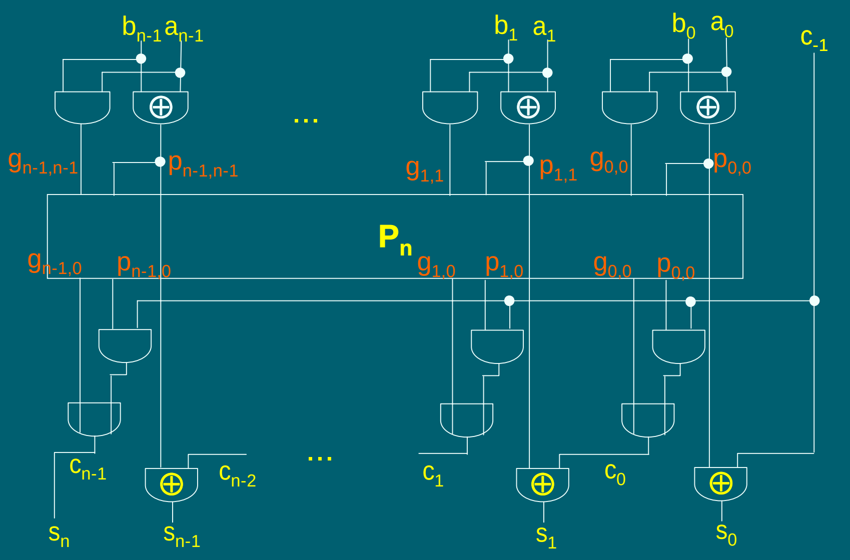
Tiefe eines CR_n:

$depth(CR_n) = 3 + 2(n-1)$

Conditional Sum Addierer (CSA)



Carry Lookahead Addierer (CLA)



Gesamtkosten

Kosten: $C(CLA_n) \leq 6n + 2n + 3n = 11n$

Tiefe: $\text{depth}(CLA_n) \leq 4 \log(n) - 2 + 1 + 3$

$= 4 \log(n) + 2$

Addition von Zweierkomplementzahlen

Wiederholung:

Formale Darstellung:

$$[a_n a_{n-1} \ldots a_0] + [b_n b_{n-1} \ldots b_0] =$$

$$\left(-a_n 2^n\right) + \left(-b_n 2^n\right) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i + \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$$

BB TI I 11.1

Behauptung

Zur Addition von (n+1)-Bit-Zweierkomplementzahlen kann man (n+1)-Bit-Binäraddierer benutzen.

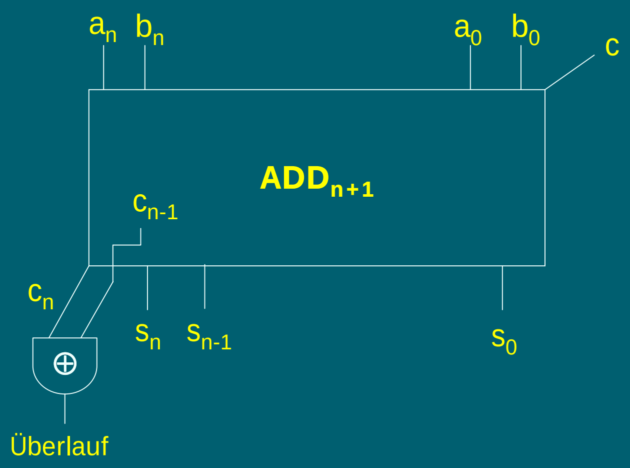
Der Test, ob das Ergebnis durch eine (n+1)-Bit-Zweierkomplementzahl darstellbar ist, d. h. ob das Ergebnis aus

$R_n = \{-2^n, \ldots, 2^n-1\}$ ist,

läßt sich zurückführen auf den Test $c_n = c_{n-1}$.

BB TI I 11.1

n-Bit Addierer



Satz 11.3

Seien $a,b \in \mathbf{B}^{n+1}$, $c_{-1} \in \{0,1\}$ und $s \in \{0,1\}^{n+1}$,

so dass $\langle c_n, s \rangle = \langle a \rangle + \langle b \rangle + c_{-1}$.

Dann gilt:

i) $[a] + [b] + c_{-1} \in R_n \Leftrightarrow c_n = c_{n-1}$

ii) $[a] + [b] + c_{-1} \in R_n \Rightarrow [a] + [b] + c_{-1} = [s]$

Beweis durch Fallunterscheidung [a],[b] beide positiv, beide negativ bzw. O.E. [a] negativ, [b] positiv

und Nachrechnen ...

Bemerkung:

Steht c_{n-1} nicht zur Verfügung (z.B. CSA),

so kann man den Überlauftest

$$[a]+[b]+c_{-1} \notin R_n \Leftrightarrow a_n = b_n \neq s_n$$

verwenden.