9.2 Weitere DD-Typen

Die wichtigsten ...

- **BDDs** [Bryant 1986]
- **KFDDs (Kronecker Functional Decision Diagrams)** [Drechsler, Sarabi, Becker, Perkowski 1994]
- **Word-Level DDs**
  - ***BMDs (Multiplicative Binary Moment Diagrams)** [Bryant, Chen 1995]
  - **K*BMDs (Kronecker Multiplicative Binary Moment Diagrams)** [Drechsler, Becker, Ruppertz 1996]

Kronecker Functional DDs

- BDDs zerlegen an jedem Knoten v mit Index x die dazu gehörige Funktion $f := f_v$ nach der

  Shannon Zerlegung (**S**)

  $$f = x \cdot f_{x=1} \oplus x' \cdot f_{x=0}$$

- Andere Zerlegungsarten:
  - **positive Davio Zerlegung** (**pD**)

    $$f = f_{x=0} \oplus x \cdot (f_{x=1} \oplus f_{x=0})$$

  - **negative Davio Zerlegung** (**nD**)

    $$f = f_{x=1} \oplus x' \cdot (f_{x=1} \oplus f_{x=0})$$

KFDD: Formale Definition

Ein **KFDD** mit Wurzel v über $X_n = \{x_1,\ldots,x_n\}$ wird beschrieben durch

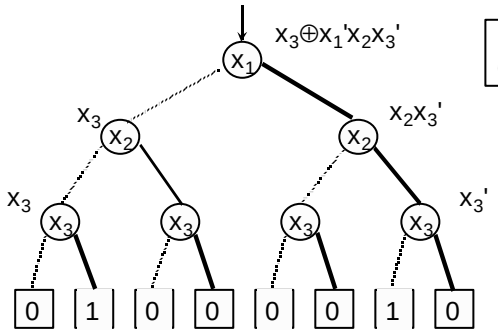
- einen DD mit Wurzel v über X_n,
- einer Zerlegungstyp-Liste $(d_1,\ldots,d_n) \in \{ S, pD, nD \}$.

Die Interpretation als Boolesche Funktion f_v: $\mathbf{B}^n \rightarrow \{0,1\}$ ist definiert durch:

- Ist v ein Blatt, so ist f_v die durch die Markierung gegebene konstante Funktion
- Ist v ein mit x_j markierter innerer Knoten und d_j=S, so ist f_v gegeben durch
  $f_v = x_j' \cdot f_{low(v)} + x_j \cdot f_{high(v)}$
- Ist v ein mit x_j markierter innerer Knoten und d_j= pD, so ist f_v gegeben durch
  $f_v = f_{low(v)} \oplus x_j \cdot f_{high(v)}$
- Ist v ein mit x_j markierter innerer Knoten und d_j= nD, so ist f_v gegeben durch
  $f_v = f_{low(v)} \oplus x_j' \cdot f_{high(v)}$

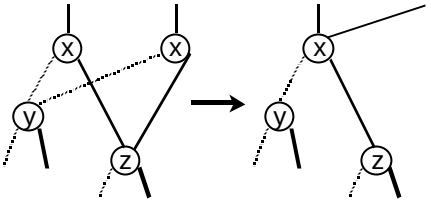
Beispiel für KFDDs

$X=\{x_1,x_2,x_3\}$, Zerlegungstyp-Liste=(nD,pD,S)

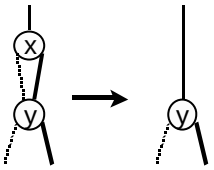


Der KFDD ist offensichtlich geordnet, aber nicht reduziert!

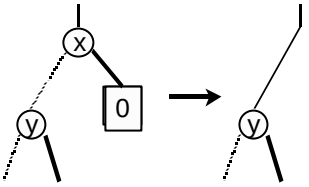
Reduktionsregeln bei KFDDs



gültig unabhängig vom Zerlegungstyp



Zerlegungstyp(x) = S



Zerlegungstyp(x)=pD | nD

Kanonizität der KFDDs

Für eine beliebige feste Variablenordnung
und eine beliebige feste Zerlegungstyp-Liste
sind **KFDD**s
kanonische Darstellungen Boolescher Funktionen.

Vergleich KFDDs versus BDDs

- KFDDs sind mächtiger als BDDs! (BDDs sind spezielle KFDDs.)
- Anderseits hat sich gezeigt, dass es oft schwierig ist, das zusätzliche Potential auszunutzen:
  Neben der Variablenordnung muß noch eine geeignete Zerlegungstyp-Liste berechnet werden.
- Operationen können bei KFDDs teuer sein!

  (Zur Erinnerung: Bei BDDs ist die Laufzeit der Syntheseoperationen AND, OR, EXOR, NOT polynomiell beschränkt.)

Word-Level DDs

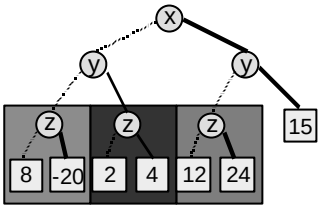
- stellen Pseudo-Boolesche Funktionen
  $f : \{0,1\}^n \rightarrow \mathbf{Z}$ (bzw. $f : \{0,1\}^n \rightarrow \mathbf{Q}$) dar.
- Blätter sind mit ganzen Zahlen (rationalen Zahlen) markiert
- Andere Zerlegungstypen

  z.B. $f = f_{x=0} + x \cdot (f_{x=1} - f_{x=0})$

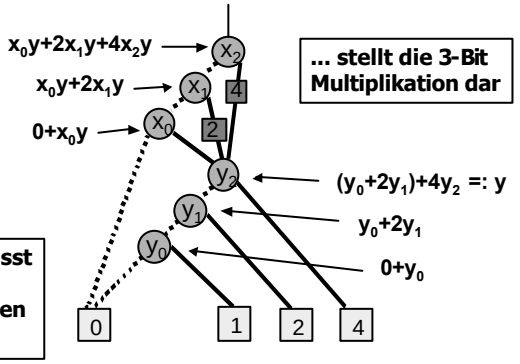
  $+, \cdot, -$ arithmetische Operationen !!

Beispiel

- f(x,y,z) = 8-20z+2y+4yz+12x+24xz+15xy
  = (8-20z+2y+4yz) + x(12+24z+15y)
  = ((8-20z) + y(2+4z)) + x((12+24z)+15y))



World-Level DD der Multiplikation



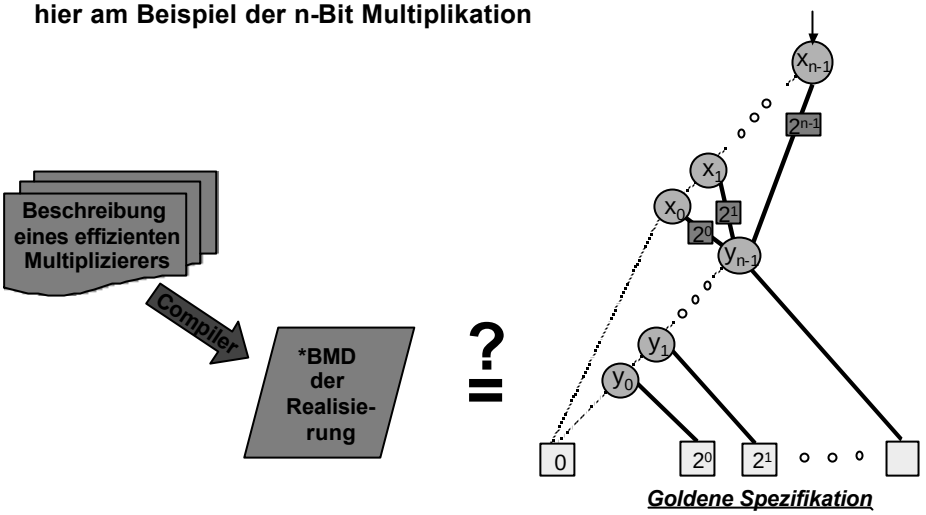
... stellt die 3-Bit Multiplikation dar

Die Multiplikation lässt sich durch ein DD mit 2n inneren Knoten beschreiben.

$$c_{low(v)} \cdot f_{low(v)} + x_j \cdot c_{high(v)} \cdot f_{high(v)}$$

Ablauf des Verifikationsprozesses

hier am Beispiel der n-Bit Multiplikation



Fazit

- **DDs erlauben „häufig" speicherplatz-effiziente Darstellung**
  - Boolesche Funktionen mit vielen Ein- und Ausgängen darstellbar
  - ⇒ Logiksynthese und Verifikation großer Funktionen potentiell möglich
- **einige in der Praxis vorkommende Funktionen nur mit exponentiellem Aufwand darstellbar**
  - Bsp: BDDs für die Multiplikation
  - ⇒ kein Allheilmittel, aber besser als bisher bekannte kanonische Darstellungen