8.2 Implikanten und Primimplikanten

Definitionen

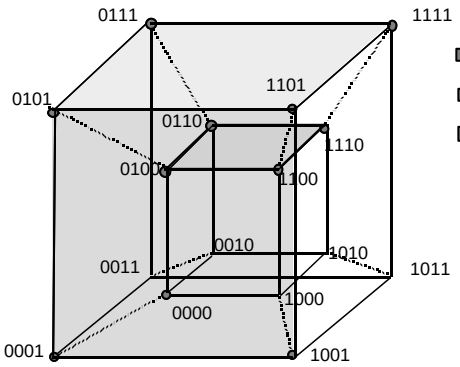
Sei f eine Boolesche Funktion mit einem Ausgang.

- Ein **Implikant von** f ist ein Monom q mit $\psi(q) \leq f$.
- Ein **Primimplikant von** f ist ein maximaler Implikant q von f, d.h. es gibt keinen Implikanten s ($s \neq q$) von f mit $y(q) \leq y(s)$.

Veranschaulichung durch n**-dimensionalen Würfel**

- Ein **Implikant von** f ist ein Teilwürfel, der nur markierte Knoten enthält.
- Ein **Primimplikant von** f ist ein maximaler Teilwürfel mit dieser Eigenschaft.

Implikanten und Primimplikanten ff



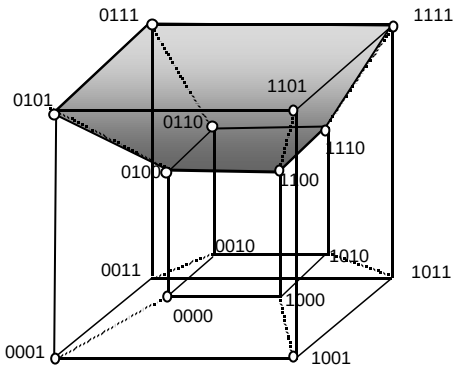
Implikanten

- alle markierten Knoten
- alle Kanten, deren Ecken alle markiert sind
- alle Flächen, deren Ecken alle markiert sind
- alle 3-dimensionalen Würfel, deren Ecken alle markiert sind.

allgemein

Die Implikanten sind die Teilwürfel, deren Ecken alle markiert sind.

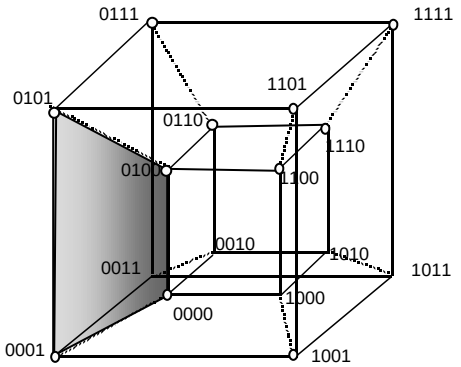
Implikanten und Primimplikanten ff



Es gibt **3 Primimplikanten**, der durch unseren Würfel definierten Funktion:

- x_2

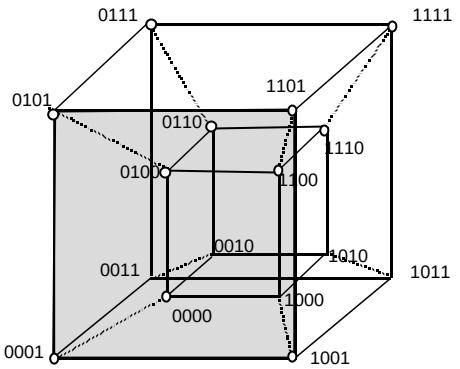
Implikanten und Primimplikanten ff



Es gibt **3 Primimplikanten**, der durch unseren Würfel definierten Funktion:

- x_2
- $x_1'x_3'$

Implikanten und Primimplikanten ff



Es gibt **3 Primimplikanten**, der durch unseren Würfel definierten Funktion:

- x_2
- $x_1'x_3'$
- $x_3'x_4$

Polynome und Implikanten einer Funktion f

Lemma

Die Monome eines Polynoms p von f sind alle Implikanten von f.

Beweis

Enthält ein Polynom p von f ein Monom m,
welches nicht Implikant von f ist,

so gilt nicht $\psi(m) \leq f$,

d.h. es gibt eine Belegung $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ der Variablen $(x_1,\ldots,x_n)$ mit

- $f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=0$
- $\psi(m)(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=1$, also auch $\psi(p)(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=1$,

d.h. Monom m ist ein Teilwürfel, bei dem eine Ecke nicht markiert ist.

Demnach ist Polynom p kein Polynom von f.

Widerspruch!

Billigste Überdeckungen der markierten Ecken

Zur Erinnerung

- Die **primären Kosten** $cost_1(p)$ sind gleich der Anzahl der Monome in p
- Die **sekundären Kosten** $cost_2(p)$ sind gleich der Anzahl der Literale in p plus die Anzahl der Monome in p.

Vereinbarung

Sei im folgenden cost $= (cost_1, cost_2)$ die Kostenfunktion mit der Eigenschaft, dass für zwei Polynome p und p' die Ungleichung $cost(p) \leq cost(p')$ genau dann gilt, wenn entweder

- $cost_1(p) \leq cost_1(p')$ oder
- $cost_1(p) = cost_1(p')$ und $cost_2(p) \leq cost_2(p')$

gilt.

Billigste Überdeckungen der markierten Ecken ff

Definition

Ein **Minimalpolynom** p einer Booleschen Funktion f ist ein Polynom von f mit minimalen Kosten, d.h. mit der Eigenschaft $cost(p) \leq cost(p')$ für jedes Polynom p' von f.

Quine's Primimplikanten Satz

Satz

Jedes Minimalpolynom p einer Booleschen Funktion f besteht ausschließlich aus Primimplikanten von f .

Beweis

Nehme an, dass p einen nicht primen Implikanten m von f enthält.
m wird durch einen Primimplikanten m' von f überdeckt,
ist also in m' enthalten.

Es gilt demnach cost(m') < cost(m).
Ersetzt man in p den Implikanten m durch den Primimplikanten m`,
so erhält man ein Polynom p`, das ein Polynom von f ist mit
cost(p') < cost(p) .

Widerspruch dazu, dass p ein Minimalpolynom ist!

Berechnung von Implikanten

Lemma 1

Ist m ein Implikant von f, so auch $m \cdot x$ und $m \cdot x'$ für jede Variable x, die in m weder als positives noch als negatives Literal vorkommt.

Beweis

$m \cdot x$ und $m \cdot x'$ sind Teilwürfel des Würfel m.

Sind also alle Ecken von m markiert, so auch alle Ecken von $m \cdot x$ und $m \cdot x'$.

Lemma 2

Sind $m \cdot x$ und $m \cdot x'$ Implikanten von f , so auch m.

Beweis

$$f \geq y(m \cdot x) + y(m \cdot x') = y(m) \cdot y(x) + y(m) \cdot y(x') = y(m) \cdot (y(x) + y(x')) = y(m)$$

Charakterisierung von Implikanten

Satz

Ein Monom m ist genau dann ein Implikant von f, wenn entweder

- m ein Minterm von f ist, oder
- $m \cdot x$ und $m \cdot x'$ Implikanten von f sind für eine Variable x , die nicht in m vorkommt

also

$$m \in Implikant(f) \quad \Leftrightarrow$$
$$[m \in Minterm(f)] \vee [m \cdot x, m \cdot x' \in Implikant(f)]$$

Beweis

folgt unmittelbar aus Lemma 1 und Lemma 2