7.3 Boolesche Ausdrücke

- Eine Beschreibungsmöglichkeit für Booleschen Funktionen
- bisher:
  Tabellenform (siehe Lampenbeispiel) bei n Variablen 2^n Einträge
- hier:
  „benutze algebraische Struktur" zur Beschreibung

Boolesche Ausdrücke

- Wir betrachten n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Sei

$$X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

- Boolesche Ausdrücke werden über einem Alphabet A definiert.

$$A = X_n \cup \{0, 1, +, \cdot, \sim, (,)\}$$

- **Definition:**
  Die Menge $BE(X_n)$ der **vollständig geklammerten booleschen Ausdrücke über X_n** ist eine Teilmenge von A*, die folgendermaßen induktiv definiert ist:

$BE(X_n)$

- Die Elemente 0 und 1 sind Boolesche Ausdrücke
- Die Symbole/Variablen $x_1, \ldots, x_n$ sind Boolesche Ausdrücke
- Sind g und h Boolesche Ausdrücke, so auch
  die **Disjunktion** $(g+h)$,
  die **Konjunktion** $(g \cdot h)$
  und die **Negation** $(\sim g)$
- Nichts sonst ist ein Boolescher Ausdruck.

Vereinbarung für das Schreiben

Negation ~ bindet stärker als Konjunktion ·

Konjunktion · bindet stärker als Disjunktion +

--> Klammern können häufig weggelassen werden, ohne dass Mehrdeutigkeiten enstehen

Interpretation Boolescher Ausdrücke

- Jedem Booleschen Ausdruck kann eine Boolesche Funktion zugeordnet werden:

$$y : BE(X_n) \rightarrow \mathcal{B}_n$$

- y wird folgendermaßen induktiv definiert
  - $y(0) = \underline{\mathbf{0}}$
  - $y(1) = \underline{\mathbf{1}}$
  - $y(x_i)(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \alpha_i \quad \forall\alpha\in \mathbf{B}^n$
  - $y((g+h)) \quad = y(g) + y(h)$
  - $y((g \cdot h)) \quad = y(g) \cdot y(h)$
  - $y((\sim g)) \quad = \sim y(g)$

Interpretation Boolescher Ausdrücke

- Gilt $\mathcal{y}$ (e)=f für einen Booleschen Ausdruck e und eine Boolesche Funktion f, so sagen wir, dass e ein **Boolescher Ausdruck von** f ist bzw. dass e die Boolesche Funktion f **beschreibt**.
- $\mathcal{y}(e)(\alpha)$ für ein $\alpha \in \mathbf{B}^n$ ergibt sich durch Ersetzen von x_i durch α_i für alle i in e und Rechnen in der BA **B**.

Interpretation Boolescher Ausdrücke

Zwei BEs e_1 und e_2 heißen **äquivalent** ($e_1 \equiv e_2$)
genau dann, wenn

$$\mathcal{y}(e_1) = \mathcal{y}(e_2)$$

Bis jetzt wissen wir, dass jeder BE eine BF definiert.

Wie ist es mit der Umkehrung??

Spezielle Boolesche Ausdrücke: Polynome

- Die Booleschen Ausdrücke x_i und x_i' heissen **Literale**, wobei x_i als **positives Literal** und x_i' als **negatives Literal** bezeichnet wird.
- Eine Konjunktion von Literalen wird mit **Monom** bezeichnet, wenn zusätzlich folgendes gilt:
  - jedes Literal kommt höchstens einmal vor
  - nicht sowohl das positive als auch das negative Literal einer Variable kommen vor
- Ein Monom heißt **vollständig** oder **Minterm**, wenn jede Variable entweder als positives oder als negatives Literal vorkommt.

Spezielle Boolesche Ausdrücke: Polynome

- Für ein $\alpha \in \mathbf{B}^n$ heißt

$$m(a) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}$$

der zu α gehörende Minterm

Eine Disjunktion von paarweise verschiedenen Monomen heißt **Polynom**. Sind alle Monome des Polynoms vollständig, so heißt das Polynom **vollständig**.

Unter einer **disjunktiven Normalform** einer Booleschen Funktion *f* versteht man ein Polynom von *f*.
Unter einer **kanonischen disjunktiven Normalform** einer Booleschen Funktion *f* versteht man ein vollständiges Polynom von *f*.

Boolesche Funktionen / BoolescheAusdrücke

Lemma

- Zu jeder Booleschen Funktion f gibt es einen Booleschen Ausdruck, der f beschreibt.
- Es gibt viele BEs für festes f .

Beweis
Es gilt immer

$$f = \sum_{a \in ON(f)} m(a)$$

Für jeden Booleschen Ausdruck *h* gilt

$$y(h) = y(h+h) = y(h+h+h) = \ldots$$

Normalformen

- $$f = \sum_{a \in ON(f)} m(a)$$

  heißt **kanonische disjunktive Normalform (KDNF)** von f

- Die kanonische disjunktive Normalform von f ist eindeutig.
- Es gibt weitere kanonische Normalformen (konjunktive Normalform, parity-Polynome).

Fragen

- Wenn es nun viele Polynome (Boolesche Audrücke) für eine Funktion f gibt, ...

  Wie findet man geeignetes Polynom (Boolesche Audruck) ?

- Haben Polynome (Boolesche Ausdrücke) ein Pendant in der „Realität“?