## 7.2 Boolesche Algebren

Es sei M eine Menge, auf der zwei binäre Operationen $\cdot$ und $+$ und eine unäre Operation $\sim$ definiert sind.

Das Tupel $(M, \cdot, +, \sim)$ heisst **Boolesche Algebra** falls für alle $x,y,z \in M$ die folgenden Regeln gelten:

| | | |
|---|---|---|
| **Kommutativität** | $x+y=y+x$ | $x \cdot y=y \cdot x$ |
| **Assoziativität** | $x+(y+z)=(x+y)+z$ | $x \cdot (y \cdot z)=(x \cdot y) \cdot z$ |
| **Absorption** | $x+(x \cdot y)=x$ | $x \cdot (x+y)=x$ |
| **Distributivität** | $x+(y \cdot z)=(x+y) \cdot (x+z)$ | $x \cdot (y+z)=(x \cdot y)+(x \cdot z)$ |
| **Auslöschung** | $x+(y \cdot \sim y)=x$ | $x \cdot (y+\sim y)=x$ |



## Weitere Regeln in Booleschen Algebren

Es gelten weitere Regeln, die aus den Axiomen ableitbar sind, z.B.:

- **Existenz Neutraler Elemente:** **0** für $+$, **1** für $\cdot$
- **Idempotenz** $x+x=x$, $x \cdot x=x$
- **de Morgan Regel** $\sim(x+y) =\sim x \cdot \sim y$, $\sim(x \cdot y)=\sim x+\sim y$
- **Consensus** $(x \cdot y)+(\sim x \cdot z)=(x \cdot y)+(\sim x \cdot z)+(y \cdot z)$, $(x+y) \cdot (\sim x+z)=(x+y) \cdot (\sim x+z) \cdot (y+z)$

## Dualitätsprinzip bei Booleschen Algebren

**Prinzip der Dualität**

Gilt eine aus der Definition einer Booleschen Algebra abgeleitete Gleichung p, so gilt auch die zu p **duale Gleichung**, die aus p hervorgeht durch gleichzeitiges Vertauschen von + und ·, 0 und 1.

**Beispiel:**

$$(x \cdot y)+(\sim x \cdot z)+(y \cdot z)=(x \cdot y)+(\sim x \cdot z)$$
$$(x+y) \cdot (\sim x+z) \cdot (y+z)=(x+y) \cdot (\sim x+z)$$



## Die Boolesche Algebra der Teilmengen von S

- $S$ : Menge
- $2^S$ : die Potenzmenge von S
- $M_1 \cup M_2$ : die Vereinigung der Mengen $M_1$ und $M_2$ aus $2^S$
- $M_1 \cap M_2$ : der Durchschnitt der Mengen $M_1$ und $M_2$ aus $2^S$
- $\sim M$ : das Komplement $S \backslash M$ von M bzgl. S

**Satz:**

$(2^S, \cap, \cup, \sim)$ ist eine Boolesche Algebra.

## Die 2-elementige Boolesche Algebra

**B** := {0,1}
a+b := a+b-ab (ganzzahlige Operationen) bzw. logisches Oder
a*b := ganzzahlige Multiplikation bzw. logisches Und
~a := 1-a bzw. logisches Nicht

**Satz**

( **B**, +, *,~) ist eine Boolesche Algebra.

(Anstelle von +, * wird häufig Ú, Ù benutzt.)



## Die Boolesche Algebra der Booleschen Funktionen in n Variablen

- $\mathcal{B}_n := \mathcal{B}_{n,1}$ Menge der Booleschen Funktionen in n Variablen, m=1
- $f \cdot g \in \mathcal{B}_n$ definiert durch $(f \cdot g)(\alpha)=f(\alpha) \wedge g(\alpha) \quad \forall \alpha \in B^n$
- $f + g \in \mathcal{B}_n$ definiert durch $(f + g)(\alpha)=f(\alpha) \vee g(\alpha) \quad \forall \alpha \in B^n$
- $\sim f \in \mathcal{B}_n$ definiert durch $\sim f(\alpha)=1 \Leftrightarrow f(\alpha)=0 \quad \forall \alpha \in B^n$

**Satz**

$(\mathcal{B}_n, \cdot, +, \sim)$ ist eine Boolesche Algebra.

# Die Boolesche Algebra der Booleschen Funktionen in n Variablen

**Beispiel**

- $\mathcal{B}_2$
- Konjunktion, Disjunktion, EXOR
- Wie kann man alle Booleschen Funktionen in $\mathcal{B}_2$ bzw. $\mathcal{B}_n$ beschreiben, ev. aus „Basisfunktionen" konstruieren?
- Welche Basisfunktionen sind wichtig?