7.2 Boolesche Algebren

Es sei M eine Menge, auf der zwei binäre Operationen $\cdot$ und + und eine unäre Operation ~ definiert sind.

Das Tupel (M, $\cdot$, +, ~) heisst **Boolesche Algebra**, falls für alle $x,y,z \in M$ die folgenden Regeln gelten:

Kommutativität	$x+y=y+x$	$x \cdot y=y \cdot x$
Assoziativität	$x+(y+z)=(x+y)+z$	$x \cdot (y \cdot z)=(x \cdot y) \cdot z$
Absorption	$x+(x \cdot y)=x$	$x \cdot (x+y)=x$
Distributivität	$x+(y \cdot z)=(x+y) \cdot (x+z)$	$x \cdot (y+z)=(x \cdot y)+(x \cdot z)$
Auslöschung	$x+(y \cdot \sim y)=x$	$x \cdot (y+\sim y)=x$

Weitere Regeln in Booleschen Algebren

Es gelten weitere Regeln, die aus den Axiomen ableitbar sind, z.B.:

- **Existenz Neutraler Elemente: 0** für +, **1** für $\cdot$
- **Idempotenz** $x+x=x$, $x \cdot x=x$
- **de Morgan Regel** $\sim(x+y) =\sim x \cdot \sim y$, $\sim(x \cdot y)=\sim x+\sim y$
- **Consensus** $(x \cdot y)+(\sim x \cdot z)=(x \cdot y)+(\sim x \cdot z)+(y \cdot z)$, $(x+y) \cdot (\sim x+z)=(x+y) \cdot (\sim x+z) \cdot (y+z)$

Dualitätsprinzip bei Booleschen Algebren

Prinzip der Dualität

Gilt eine aus der Definition einer Booleschen Algebra abgeleitete Gleichung p, so gilt auch die zu p **duale Gleichung**, die aus p hervorgeht durch gleichzeitiges Vertauschen von + und $\cdot$, 0 und 1.

Beispiel:

$$(x \cdot y)+(\sim x \cdot z)+(y \cdot z)=(x \cdot y)+(\sim x \cdot z)$$
$$(x+y) \cdot (\sim x+z) \cdot (y+z)=(x+y) \cdot (\sim x+z)$$

Die Boolesche Algebra der Teilmengen von S

- S : Menge
- 2^S : die Potenzmenge von S
- $M_1 \cup M_2$: die Vereinigung der Mengen M_1 und M_2 aus 2^S
- $M_1 \cap M_2$: der Durchschnitt der Mengen M_1 und M_2 aus 2^S
- $\sim M$: das Komplement $S \backslash M$ von M bzgl. S

Satz:

$(2^S, \cap, \cup, \sim)$ ist eine Boolesche Algebra.

Die 2-elementige Boolesche Algebra

B := {0,1}

a+b := a+b-ab (ganzzahlige Operationen) bzw. logisches Oder

a*b := ganzzahlige Multiplikation bzw. logisches Und

~a := 1-a bzw. logisches Nicht

Satz

(**B**, +, *,~) ist eine Boolesche Algebra.

(Anstelle von +, * wird häufig **Ú, Ù** benutzt.)

Die Boolesche Algebra der Booleschen Funktionen in n Variablen

- $\mathcal{B}_n := \mathcal{B}_{n,1}$ Menge der Booleschen Funktionen in n Variablen, m=1
- $f \cdot g \in \mathcal{B}_n$ definiert durch $(f \cdot g)(\alpha)=f(\alpha) \wedge g(\alpha) \quad \forall \alpha \in B^n$
- $f + g \in \mathcal{B}_n$ definiert durch $(f + g)(\alpha)=f(\alpha) \vee g(\alpha) \quad \forall \alpha \in B^n$
- $\sim f \in \mathcal{B}_n$ definiert durch $\sim f(\alpha)=1 \Leftrightarrow f(\alpha)=0 \quad \forall \alpha \in B^n$

Satz

$(\mathcal{B}_n, \cdot, +, \sim)$ ist eine Boolesche Algebra.

Die Boolesche Algebra der Booleschen Funktionen in n Variablen

Beispiel

- $\mathcal{B}_2$
- Konjunktion, Disjunktion, EXOR
- Wie kann man alle Booleschen Funktionen in $\mathcal{B}_2$ bzw. $\mathcal{B}_n$ beschreiben, ev. aus „Basisfunktionen" konstruieren?
- Welche Basisfunktionen sind wichtig?