ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

INSTITUT FÜR INFORMATIK

Prof. Dr. Bernd Becker
Dr.-Ing. Christoph Scholl
Dipl. Inf. Marc Herbstritt

Freiburg, 9. Januar 2000

9. Übungsblatt zur Vorlesung

Technische Informatik I

Aufgabe 1

a) Zeige, dass es für jede boolesche Funktion $f \in \mathcal{B}_n$ eine *Ringsummendarstellung* gibt, die keine negativen Literale enthält. D.h., beweise folgende Aussage:

Jede Funktion $f \in \mathcal{B}_n$ läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$f = \bigoplus_{i=1}^{m} x_{i_1} \dots x_{i_k}$$

mit $(x_{i_j} \in \{x_1, \dots x_n\} \vee (k = 1 \wedge x_{i_1} = 1)) \wedge x_{i_p} \neq x_{i_q} \; \forall p \neq q \;\; \forall 1 \leq i \leq k$.
Dabei darf jedes Monom nur genau einmal auftreten, d.h. $x_{i_1} \dots x_{i_k} \neq x_{j_1} \dots x_{j_h}$ für $i \neq j$.

b) Zeige oder widerlege:
Die in obiger Gleichung angegebene Darstellung ist für *jedes* $f \in \mathcal{B}_n$ eindeutig.

Aufgabe 2

Bestimme für die folgenden Funktionen die Menge der Primimplikanten mit dem Verfahren von Quine-McCluskey:

a) $f \in \mathcal{B}_4$ mit $\texttt{ON}(f)(x_1, x_2, x_3, x_4) = \{(0001), (0010), (0110), (1010), (1110), (0101)\}$.

b) $g \in \mathcal{B}_4$ mit $\texttt{OFF}(g)(x_1, x_2, x_3, x_4) = \{(0100), (0101), (0110), (1000), (1001), (1010), (1011), (1100), (1101), (1110)\}$.

Aufgabe 3

Beweise folgende Aussage:

$$\text{Es gilt: } m' \text{ ist Teilmonom von } m \quad \Rightarrow \quad m \leq m'.$$

Dabei gilt:

$$e_1 \leq e_2 :\Leftrightarrow \texttt{ON}(\psi(e_1)) \subseteq \texttt{ON}(\psi(e_2)) :\Leftrightarrow \texttt{ON}(e_1) \subseteq \texttt{ON}(e_2)$$

Desweiteren ist ein Teilmonom wie folgt definiert:

Definition (*Teilmonom*): Seien m und m' Monome. Dann heißt m' Teilmonom von m, falls die folgenden Bedingungen gelten:

a) Jedes Literal in m' kommt auch in m vor, oder $m' = 1$.

b) In m kommt mindestens ein Literal vor, das nicht in m' vorkommt.

Aufgabe 4

Betrachte die Funktion $\text{MD}_n \in \mathcal{B}_n$ (MD = Mittleres Drittel) mit $n = 3k$ und

$$\text{MD}_n(x_1, \dots, x_n) = 1 \Leftrightarrow k \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 2k.$$

a) Beweise die Behauptung:
Die Menge der Primimplikanten $\texttt{PI}(\text{MD}_n)$ für die Funktion MD_n ist die Menge aller Monome mit k positiven und k negativen Literalen.

b) Zeige:

i. Die Zahl der Monome mit der Eigenschaft aus Teilaufgabe a) beträgt $(3k)!/(k!)^3$

ii. Es gilt: $(3k)!/(k!)^3 = \Theta(\frac{3^n}{n})$

Hinweis: Verwende die Stirling-Formel: $n! = \Theta(n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n})$.

c) Wie groß ist $\texttt{ON}(\text{MD}_n)$?

d) Beweise die Behauptung:
Ein Minimalpolynom für MD_n enthält mindestens $\binom{n}{k}$ Primimplikanten.

e) Die Anzahl der Primimplikanten im vorigen Aufgabenteil genügt sogar, um MD_n minimal darzustellen. Gib ein Minimalpolynom für MD_6 an!

Abgabetermin: Dienstag, 16.01.2001, 14:00
Hinweis: Nächste Woche gibt es wegen des Testats am Donnerstag, 18.01.2001, kein Übungsblatt.