ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

INSTITUT FÜR INFORMATIK

Prof. Dr. Bernd Becker
Dr.-Ing. Christoph Scholl
Dipl. Inf. Marc Herbstritt

Freiburg, 19. Dezember 2000

8. Übungsblatt zur Vorlesung

Technische Informatik I

Zusätzliche Informationen zur Vorlesung

Wir erweitern die in der Vorlesung vorgestellten Booleschen Ausdrücke (BE) um Funktionssymbole, damit man Funktionen, die man sich schon einmal definiert hat, wieder benutzen kann.

Definition: (Erweiterte Boolesche Ausdrücke (EBE))
Sei $F = \{f_1, f_2, \ldots\}$ eine abzählbare Menge von Funktionsnamen. Jedem $f \in F$ wird durch $\sigma : F \to \mathbb{N}$ eine Stelligkeit zugeordnet. Dann hat man $EBE(X_n, F)$ und die Menge $A_F := A \cup F \cup \{, \}$, mit:

a) $EBE_0 = BE_0$ ist Menge der erweiterten BE der Tiefe 0
b) e in A_F^* liegt in $EBE_{i+1} \iff$
   i. $e = a$ mit $a \in EBE_i$
   ii. $e = (\sim a)$ mit $a \in EBE_i$
   iii. $e = (a_1 + a_2)$ mit $a_j \in EBE_i$
   iv. $e = (a_1 \cdot a_2)$ mit $a_j \in EBE_i$
   v. $e = f(e_1, \ldots, e_{\sigma(f)})$ mit $f \in F, e_1, \ldots, e_{\sigma(f)} \in EBE_i$
c) Dies sind alle EBE.

Jeder erweiterte Boolesche Ausdruck wird als Boolesche Funktion interpretiert, indem man die Symbole mit einer Bedeutung versieht. Dazu definieren wir eine Abbildung $\psi : EBE(X_n, F) \to \mathcal{B}_n$.[1] Zunächst wird ψ auf $0, 1, X_n, F$ definiert und dann auf $EBE(X_n, F)$ ausgedehnt:

Definition: (Interpretation von EBEs)

a) $\psi(0) = 0$ (Nullfunktion)
b) $\psi(1) = 1$ (Einsfunktion)
c) $\psi(x_i) = x_i$ (Projektion)
d) $\psi(f_i) = f_i$ (mit $f_i \in \mathcal{B}_{\sigma(f_i)}$).

Sei e ein beliebiger EBE der Tiefe $i > 0$. Dann ist auf e genau einer der folgenden 4 Fälle anwendbar:

[1] $\mathcal{B}_n$ bezeichnet die Menge der Booleschen Funktionen in n Variablen und einem Ausgang.

a) $e = (\sim a) \quad \rightsquigarrow \quad \psi(e) := \neg\psi(a)$
b) $e = (a_1 + a_2) \quad \rightsquigarrow \quad \psi(e) := \psi(a_1) \vee \psi(a_2)$
c) $e = (a_1 \cdot a_2) \quad \rightsquigarrow \quad \psi(e) := \psi(a_1) \wedge \psi(a_2)$
d) $e = f(e_1, \ldots, e_{\sigma(f)}) \quad \rightsquigarrow \quad \psi(e) := \psi(f)(\psi(e_1), \ldots, \psi(e_{\sigma(f)}))$

Wenn man nun einen erweiterten Booleschen Ausdruck e unter einer Interpretation ψ, also $\psi(e)$, an einer Stelle a auswerten will, kann man folgendes Lemma anwenden.

Lemma: (Auswertung eines EBE)
$\psi(e)(a)$ ergibt sich durch Ersetzen von x_i durch a_i für alle i im EBE e und Rechnen in der Booleschen Algebra $(\mathbf{B}, \wedge, \vee, \neg)$ (vgl. Übungsblatt 07, Aufgabe 3).

(Siehe auch *Keller, Paul — Hardware Design* für weitere Literatur.)

Aufgabe 1

Entscheide, ob die Booleschen Funktionen f_1 und f_2 äquivalent sind, indem du ausgehend von den Booleschen Ausdrücken die Tabellenformen der Funktionen erstellst und diese dann vergleichst.

a) $f_1 = (a \oplus b) \oplus c$,
$f_2 = (a \wedge \overline{b} \wedge \overline{c}) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b} \wedge c) \vee (\overline{a} \wedge b \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge b \wedge c)$

b) $f_1 = (\overline{a} \vee b \vee d) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b} \vee e) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b} \vee c \vee \overline{e}) \wedge (a \vee \overline{b} \vee c \vee \overline{d}) \wedge (\overline{b} \vee \overline{d} \vee e)$
$f_2 = (\overline{a} \wedge \overline{d}) \vee (\overline{b} \wedge d) \vee (b \wedge c \wedge e)$

Aufgabe 2

Betrachte $EBE(X_n, F)$ mit $F = \{\text{NAND}\}$ und $\sigma(\text{NAND}) = 2$.
$\psi(\text{NAND})$ sei gegeben durch $\psi(\text{NAND})(x_1, x_2) = \neg(x_1 \wedge x_2)$.

Zeige: $\forall f \in \mathcal{B}_n$ gibt es einen erweiterten Booleschen Ausdruck e mit $\psi(e) = f$ und der Eigenschaft, daß $\cdot$ und $+$ in e nicht vorkommen.

Aufgabe 3

Sei $EBE(X_3, F)$ mit $F = \{f\}$, $\sigma(f) = 3$ gegeben. Weiter gilt $\psi(f) = x_2 \wedge \overline{x_3}$.
Werte den erweiterten Booleschen Ausdruck

$$e = x_1 \cdot f(x_2, 1, (x_1 + x_3))$$

für $a = (1, 0, 1)$ aus. Gib dabei die einzelnen Schritte an, wie sie bei Anwendung des Lemmas (siehe [Auswertung eines EBE]) auftreten. Unterscheide streng zwischen den Zeichen $+, \cdot, \sim$ aus dem Alphabet A für Boolesche Ausdrücke und den Zeichen $\vee, \wedge, \neg$, die die Operatoren aus der Booleschen Algebra $(\mathbf{B}, \wedge, \vee, \neg)$ bezeichnen.

Aufgabe 4

„Farmer's Dilemma:"
Der Farmer, Wolf, Ziege und ein Kohlkopf befinden sich auf einer Flußseite. Der Farmer besitzt ein Boot, welches ihn selbst sowie einen weiteren Gegenstand bzw. ein weiteres Tier trägt. Er möchte nun mit allen Gütern auf die andere Seite des Flusses gelangen. Unglücklicherweise frißt der Wolf die Ziege bzw. die Ziege den Kohlkopf, wenn er diese unbeaufsichtigt läßt. Zur Vereinfachung sei angenommen, daß das Übersetzen keine Zeit benötigt, der Bauer also entweder am linken oder am rechten Flußufer ist.
Damit nun der Bauer nicht versehentlich Wolf und Ziege bzw. Ziege und Kohl allein läßt, soll ein Warnsystem aufgebaut werden, welches in diesen Fällen Alarm auslöst.

a) Die Buchstaben f, w, z und k bezeichnen Farmer, Wolf, Ziege und den Kohlkopf. Ist der Wert einer solchen Variablen 0 (1), dann befindet sich der Gegenstand bzw. das Lebewesen auf der linken (rechten) Flußseite. Gib die Funktionstabelle der Alarmfunktion a an.

b) Gib für die Funktion a einen vollständig geklammerten Booleschen Ausdruck e in disjunktiver Normalform mit Variablen aus $V = \{f, w, z, k\}$ an und zeige, daß gilt: $\psi(e) = a$.

c) Bestimme auch die Darstellung von a in *kanonischer DNF* und in *kanonischer KNF*.

d) Wie kann der Farmer alle seine Güter *unversehrt* von der linken auf die rechte Flußseite bringen ?

Abgabetermin: 09.01.2001