SAT Solver

Was ist SAT?

- Erfüllbarkeit von aussagenlogischen Formeln
  - gegeben in konjunktiver Normalform
  - $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2) \cdot (\neg x_1 + \neg x_3) \cdot (\neg x_1 + x_3)$
  - Erfüllende Belegung:
    $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0.$

Komplexität

- SAT ist **NP-vollständig**
  - Sogar 3SAT ist NP-vollständig
  - Es kann nicht erwartet werden, dass es für alle Probleminstanzen schnell eine Antwort gibt
  - In der Praxis sind die Instanzen oft „einfach“, >100.000 Klauseln sind handhabbar
  - Es gibt Funktionen, deren Erfüllbarkeit nur schwer entscheidbar ist.

Anwendungen

- **Equivalence Checking**
- **Property Checking**
- Logik-Synthese
- Testvektor-Generierung
- Künstliche Intelligenz
- ... und vieles mehr

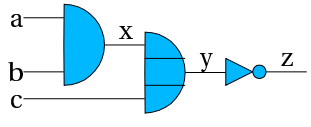
Literatur

- J.P. Marques-Silva, K.A. Sakallah: Grasp – a search algorithm for propositional satisfiability. IEEE Trans. on Computers, 48(5), 506-521, 1999.
- M. Moskewicz, *et al.*: Chaff: Engineering an efficient SAT solver. Proc. of the 39th Design Automation Conf., 2001.
- H. Chen, C. Gomes, B. Selman: Formal models of heavy-tailed behavior in combinational search. Principles and Practice of Constraint Programming, LNCS 2239, pp. 408-421.

Schaltkreise als SAT-Formel

- SAT basiert auf konjunktiver Normalform
- Produkt der charakteristischen Funktion der Gatter
  - neue Variablen für alle internen Signale
- Beispiel: AND-Gatter $(x \equiv a \cdot b)$:
  $(x \equiv a \cdot b) = (x \rightarrow a) \cdot (x \rightarrow b) \cdot (\neg x \rightarrow (\neg a + \neg b))$
  $= (\neg x + a) \cdot (\neg x + b) \cdot (x + \neg a + \neg b)$
- Beispiel: OR-Gatter $(x \equiv a + b)$:
  $(x \equiv a + b) = (x + \neg a) \cdot (x + \neg b) \cdot (\neg x + a + b)$

Schaltkreise als SAT-Formel (2)



- $(x \equiv a \cdot b) \cdot (y \equiv x + c) \cdot (z \equiv \neg y)$
  - $(x \equiv a \cdot b) = (\neg x + a) \cdot (\neg x + b) \cdot (x + \neg a + \neg b)$
  - $(y \equiv x + c) = (y + \neg x) \cdot (y + \neg c) \cdot (\neg y + x + c)$
  - $(z \equiv \neg y) = (z + y) \cdot (\neg z + \neg y)$
- Größe der SAT-Formel ist linear zur Größe des Schaltkreises

Satisfiability Checking

- Finde eine Belegung der Variablen, die die Formel erfüllt, oder beweise, dass es keine solche Belegung gibt
  - Erfüllen bedeutet, dass alle Klauseln *gleichzeitig* erfüllt sein müssen!
- Typische Größen (lösbarer) SAT-Instanzen:
  - > 100 Variablen
  - > 10 Millionen Klauseln

Entwicklung von SAT-Solvern

Instance	Posit' 94	Grasp' 96	Sato' 98	Chaff' 01
ssa2670-136	40,66s	1,2s	0,95s	0,02s
bf1355-638	1805,21s	0,11s	0,04s	0,01s
pret150_25	>3000s	0,21s	0,09s	0,01s
dubois100	>3000s	11,85s	0,08s	0,01s
aim200-2_0-no-1	>3000s	0,01s	0s	0s
2dlx_..._bug005	>3000s	>3000s	>3000s	2,9s
c6288	>3000s	>3000s	>3000s	>3000s

Quelle: Joao Marques-Silva, Technical University of Lisbon

Satisfiability Checking (2)

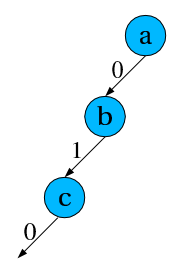
- Durch eine Belegung (eines Teils der) Variablen kann eine Klausel
  - erfüllt sein (= 1)
  - unerfüllt sein (= 0)
  - offen sein („unresolved“)
- Beispiel: $(a+b)(\neg a+c)(\neg a+d)$ $a=1, b=1, c=0$

SAT Solving

- Naives Verfahren: Aufzählen aller Belegungen
- Besseres Verfahren:
  - Aufzählen der Belegungen in Form eines „*Entscheidungsbaumes*“
  - Backtracking, sobald es einen Konflikt gibt
    - Konfliktanalyse
  - (Randomisierte) Neustarts
  - Effiziente Implementierungen

Entscheidungsbaum

- Drei Teile
  - Entscheidung
    - welche Variable, welcher Wert
  - Deduktion
    - Auflösen der Implikationen
  - Diagnose
    - der Konflikte



Begriffe

- Literal
  - Eine Variable oder deren Komplement
- Freie Literale
  - Literale, die durch eine Variablenbelegung nicht festgelegt sind
- Unit Clause
  - Klausel, die nur aus einem (freien) Literal besteht
- Null Clause
  - Eine leere Klausel (unerfüllbar!)

Davis-Putnam – Algorithmus

```
bool Satisfiable(clause list S) {
    // unit propagation
    do {
        for each unit clause L ∈ S do {
            delete every clause from S containing L
            delete ¬L from every clause S containing ¬L
        }
        if S is empty then return true;
        if S contains a null clause then return FALSE;
    } while (there was a change);
    ...
```


Davis-Putnam – Algorithmus (2)

```
    ...
    // splitting
    choose a literal L occurring in S
    if Satisfiable(S ∪ { L }) then return TRUE;
    if Satisfiable(S ∪ { ¬L }) then return TRUE;
    return FALSE;
}
```


Beispiel

$k_1 = (\neg x_1 + \neg x_3)$, $k_2 = (x_1 + \neg x_2)$, $k_3 = (x_1 + \neg x_2 + \neg x_3)$

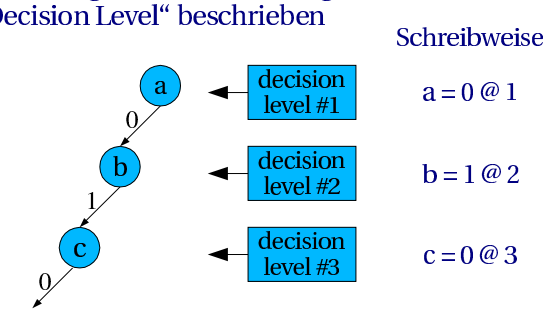
Action	Decision	Implic.	k_1	k_2	k_3
Start	Ø	Ø	k_1	k_2	k_3
Decision	x_2=1	Ø	k_1	x_1	$x_1+\neg x_3$
Decision	x_2=1, x_3=1	Ø	$\neg x_1$	x_1	x_1
Implicat.	x_2=1, x_3=1	x_1=0	1	C	Conflict
Back	x_2=1	Ø	k_1	x_1	$x_1+\neg x_3$
Decision	x_2=1, x_3=0	Ø	1	x_1	1
Implicat.	x_2=1, x_3=0	x_1=1	1	1	1

Neuere Verbesserungen

- Suchstrategien
  - Welche Variable wird ausgewählt
  - Wann / wie soll Backtracking ausgeführt werden?
- Suchtechniken
  - Hinzunahme neuer Klauseln
  - Vereinfachen der Formel
- Bessere Datenstrukturen
  - Schnellere Branch-Strategien
  - Schnellere Implikationen
  - Schnellere Konfliktanalyse

Decision Level

- Die Reihenfolge der Entscheidungen wird durch das „Decision Level“ beschrieben



Implikationen

- Betrachte $(a+b)(\neg a+c)(\neg a+d+e)$
  - Wenn $a=0$ ist, dann muss $b=1$ sein, d.h. aus $a=0 \,@\, i$ folgt $b=1 \,@\, i$ als direkte Implikation
  - Wenn $a=1 \,@\, i$ und später $d=0 \,@\, j$, dann impliziert dies $e=1 \,@\, j$.
- Das Erkennen *aller* Implikationen wird als **Boolean Constraint Propagation** (BCP) bezeichnet.

Implikationsgraph

- Die Implikationen einer Entscheidung können als Implikationsgraph gespeichert werden
  - Ein Knoten für jede Variablenzuweisung
  - Kanten sind mit Klauseln markiert und bedeuten „Implikation“
- Beispiel: Klausel $k_i = (a + b)$

$$a = 0 \,@\, j \xrightarrow{k_i} b = 1 \,@\, j$$

Beispiel

- Zuweisungen: x_9=0@1,x_{10}=0@3, x_{11}=0@3, x_{12}=1@2, x_{13}=1@2
- Momentan: x_1=1@6

$k_1 = (\neg x_1 \vee x_2)$
$k_2 = (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_9)$
$k_3 = (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4)$
$k_4 = (\neg x_4 \vee x_5 \vee x_{10})$
$k_5 = (\neg x_4 \vee x_6 \vee x_{11})$
$k_6 = (\neg x_5 \vee x_6)$
$k_7 = (x_1 \vee x_7 \vee \neg x_{12})$
$k_8 = (x_1 \vee x_8)$
$k_9 = (\neg x_7 \vee \neg x_8 \vee \neg x_{13})$

Konfliktanalyse

- Zuweisungen: x_9=0@1,x_{10}=0@3, x_{11}=0@3, x_{12}=1@2, x_{13}=1@2
- Vorhin: Zuweisung x_1=1@6 führt zu Konflikt ➜ backtrack
- Konflikt hing ab von x_1=1, x_9=0, x_{10}=0, x_{11}=0.
- Wenn diese 4 Variablen später wieder diese Belegung haben, muss Implikationsgraph wieder ausgewertet werden
- Es ist möglich, die **Ursache des Konflikts** zu **lernen**, indem die Klausel $(x_1 + \neg x_9 + \neg x_{10} + \neg x_{11})$ zur Klauselmenge hinzugenommen wird
  - Konflikt ist schon durch Auswerten der zusätzlichen Klausel sichtbar

Konfliktanalyse (2)

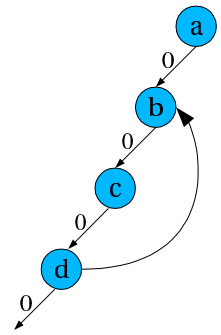
- Problem: Hinzunahme neuer Klauseln führt zu einer Vergrößerung der Klauselmenge
- Wie lässt sich ein zu starkes Wachsen verhindern?
  - Es dürfen nur Klauseln, die „wenige“ Literale enthalten, aufgenommen werden
  - Klauseln können später wieder gelöscht werden, wenn sie nichts (mehr) nutzen

Non-chronological Backtracking

- Die hinzugefügte Klausel hängt von den Variablen ab, von denen der Implikationsgraph abhängt
- Es ist möglich, dass der Konflikt nicht auf die letzte Variablenzuweisung zurückgeht
  - Beispiel:
    a = 0 @ 1, b = 0 @ 2
    Konflikt wird bei c = 1 @ 5 sichtbar
- Dann kann zu decision level 2 zurückgesprungen werden („non-chronological backtracking“)

Beispiel

- Angenommen, bei d = 0 @ 4 wird die Klausel (a + b) gelernt
- Dann ist ein Backtracking zu Level 2 möglich



Beobachtung

- 90% der Rechenzeit wird für Boolean Constraint Propagation (BCP) verbraucht
  - Effiziente Implementierung sehr wichtig
- „Schließen“ ist nur möglich, wenn eine Klausel genau eine freie Variable hat (und alle anderen Literale mit 0 belegt sind)
  - Verfahren 1: Betrachte jede Klausel und zähle die freien Variablen
- Wie kann ich dies bei einer Klausel schnell bestimmen?

Optimiertes BCP (Chaff)

- Betrachte zwei Literale l_1 und l_2 einer Klausel
  - Solange beide Literale frei sind, kann noch nichts impliziert werden
  - Wenn eines der Literale $l_b = 0$ ist (etwa $b = 1$), dann
    - gibt es entweder noch ein weiteres freie Literal. Ersetze dann l_1 durch dieses Literal
    - oder es gibt kein weiteres freies Literal. Dann ist l_2 das einzige freie Literal und es kann muss 1 sein.
  - Invariante: beide Literale einer offenen Klausel sind frei
  - Beim Backtracking muss kein Update erfolgen

Beispiel

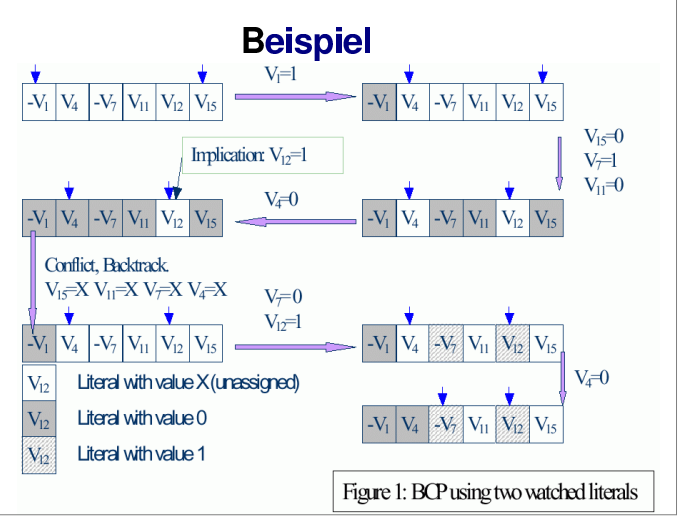


Figure 1: BCP using two watched literals

Optimiertes BCP (2)

- Vorteile:
  - Beim Backtracking muss kein teures Update erfolgen
  - Freigeben von Variablen kann in konstanter Zeit erfolgen
    - bei Verwendung von Zählern müssten diese angepasst werden
  - Erneutes Zuweisen einer Variablen mit dem gleichen Wert benötigt tendentiell sehr wenig Zeit
    - Geringere Zahl an „Cache misses“

Entscheidungsverfahren

- Welche Variablen sollte als nächstes ausgewählt werden?
  - Zufällige Bestimmung einer freien Variablen
  - Dynamic Largest Individual Sum (DLIS) Heuristik: Auswahl derjenigen Variable, die am häufigsten in den offenen Klauseln vorkommt (in Grasp verwendet)
    - Berechnung: O(# Literale)
  - Auswahl der Variablen, die am meisten Klauseln entscheidet, d.h. diejenige Variable, die am häufigsten in Unit Clauses vorkommt.

Entscheidungsverfahren (2)

- Welches Qualitätsmaß sollte für Entscheidungsverfahren verwendet werden?
  - Zahl der notwendigen Entscheidungen
    - Ein Entscheidungsverfahren, bei dem wenige Entscheidungen notwendig sind, kann sehr teure BCP-Schritte erfordern
  - Zahl der beobachteten Konflikte
    - gleiches Argument
- Kosten zur Berechnung der Entscheidung können signifikant sein

Variable State Independent Decaying Sum (VSIDS) Decision Heuristic

- Jede Variable hat für jede Polarität einen Zähler mit Anfangswert 0
- Wenn eine Klausel hinzugefügt wird, so wird der Zähler für jedes darin vorkommende Literal inkrementiert
- Die (freie) Variable und Polarität mit dem höchsten Zählerwert wird als nächstes ausgewählt
  - Ist dies nicht eindeutig, so entscheidet der Zufall
- Nach einer bestimmten Zeit werden alle Zählerwerte durch eine Konstante geteilt

VSIDS (2)

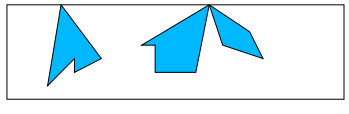
- Eine Liste der freien Variablen, sortiert nach Zählerwerten, wird in einer STL set gespeichert
- Ziel der Strategie: Erfüllen von kürzlich hinzugefügten Konfliktklauseln
  - Konfliktklauseln geben der Suche eine Richtung
- Geringer Overhead
- Wird in *Chaff* verwendet

Löschen von Klauseln

- Der Speicherverbrauch steigt enorm, wenn Klauseln immer nur hinzugefügt werden
- Unwichtig gewordene Klauseln sind zu löschen
  - Klauseln der ursprünglichen Klauselmenge dürfen nicht gelöscht werden!!!
- Strategie in Chaff:
  - Beim Anfügen einer Klausel wird bestimmt, wann sie zu löschen ist
  - Sie wird markiert, wenn zum ersten Mal mehr als N (typischerweise 100 .. 200) ihrer Literale frei werden
  - Lazy Deletion: Kompaktion geschieht später

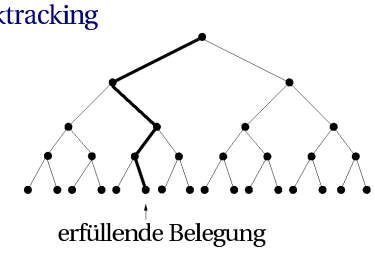
Randomisierung

- Die Laufzeit von Backtrack-basierten SAT-Solvern hängt stark von Branching-Heuristik ab
- Geringe Änderungen des Problems können einen großen Einfluss auf die Laufzeit haben
- Randomisierung der Heuristiken führt zu starken Varianzen der Laufzeiten
  - Es werden andere Teile des Suchraumes betrachtet



Szenario 1

- Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung hat ein randomisiertes Verfahren?
- Annahmen:
  - Chronological Backtracking
  - Kein BCP-Solving
  - alle Pfade gleich wahrscheinlich
  - genau eine erfüllende Belegung



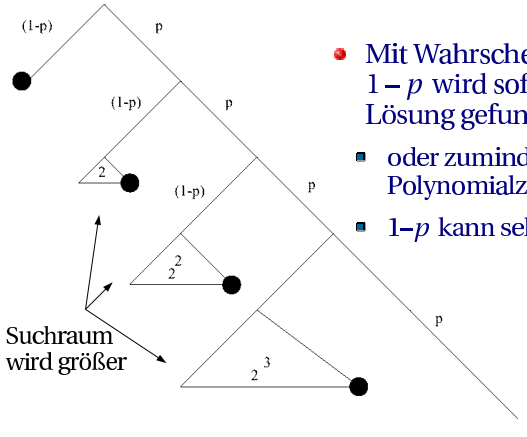
Szenario 1 (2)

- Die Wahrscheinlichkeit, dass die erfüllende Belegung in polynomieller Zeit gefunden wird, ist exponentiell klein in n,
  - so wie $f(n) / b^{n-1}$ exponentiell klein ist für jedes Polynom f.
- Macht es Sinn, die Suche zwischendurch abzubrechen und neu zu beginnen, wenn zu lange nichts gefunden wurde?
  - Nein.

Was wurde nicht betrachtet?

- Moderne SAT-Solver sind nicht „so dumm“
  - non-chronological backtracking
  - dynamic variable ordering
  - BCP, pruning
  - Lernen von Klauseln
- Dadurch werden viele „schlechte“ Teilbäume schnell verlassen
- Der resultierende Suchbaum ist sehr unregelmäßig

Szenario 2



- Mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ wird sofort eine Lösung gefunden
  - oder zumindest in Polynomialzeit)
  - $1-p$ kann sehr klein sein

Szenario 2: Wahrscheinlichkeitsverteilung

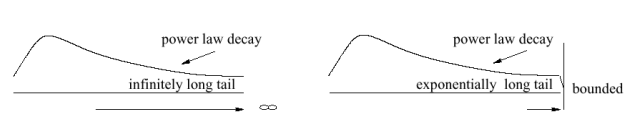
- Sei $0 \le p \le 1$ eine Wahrscheinlichkeit.
- Sei X eine Zufallsvariable, die den Wert 2^i mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)p^i$ annimmt, $i \ge 0$.
- Wahrscheinlichkeitsverteilung, da $\sum_{i \ge 0} (1-p)p^i = 1$
- Eigenschaften:
  - Wenn $p \ge ½$, dann ist der Erwartungswert ∞.
    - $EX = \sum_{i \ge 0} P[X = 2^i] 2^i = \sum_{i \ge 0} (1-p) p^i 2^i = (1-p) \sum_{i \ge 0} (2p)^i$
  - Wenn $p > ¼$, dann ist die Varianz ∞.

Szenario 2: Eigenschaften

- Es kostet viel Zeit, wenn man am Anfang nicht die richtigen Entscheidungen trifft
- Macht es Sinn, die Suche zwischendurch abzubrechen und neu zu beginnen, wenn zu lange nichts gefunden wurde?
  - Ja!
- Es lässt sich beweisen, dass die erwartete Suchzeit dadurch endlich bleibt

Szenario 3

- Suchraum hat endliche Größe
  - Erwartungswert kann nicht unendlich sein



- Unendliche Momente
- Endliche erwartete Laufzeit bei Restarts
- exponentielle Momente
- polynomielle erwartete Laufzeit bei Restarts

Szenario 3: (2)

- Macht es Sinn, die Suche zwischendurch abzubrechen und neu zu beginnen, wenn zu lange nichts gefunden wurde?
  - Ja.
- Wie verhalten sich SAT-Solver?

Search Restarts

- An einem bestimmten Punkt Neustart (Löschen aller Belegungen)
- Verschiedene Strategien können verwendet werden
  - Parallel auf verschiedenen CPUs
  - Nach jedem Restart kann die Strategie verändert werden

GSAT

- Starten mit zufälliger Belegung der Variablen
- Ändern der Belegung einer Variablen, so dass dadurch am meisten Klauseln zusätzlich erfüllt werden
- Dies wird wiederholt, bis entweder
  - eine erfüllende Belegung gefunden wurde, oder
  - eine maximale Zahl an Belegungen geändert wurden
- Im zweiten Fall wird mit einer neuen Belegung weitergemacht

GSAT (2)

```
bool GSAT(clause list S) {
    for (i = 1; i <= MAX_TRIES; ++i) {
        T = a randomly generated truth assignment
        for (j = 1; j <= MAX_FLIPS; ++j) {
            if T satisfies S, return true;
            p = a propositional variable such that a
                change in its truth assignment gives the
                largest increase in the total number of
                clauses of S that are satisfied by T.
            T = T with the truth assignment of p reversed
    }   }
    return false;
}
```


GSAT (3)

- Schwierige 3CNF-Formeln

formulae		GSAT			DP		
vars	clauses	flips	tries	time	choices	depth	time
50	215	250	6,4	0,4s	77	11	1,4s
100	430	500	42,5	6s	8,4E+04	19	2,8m
140	602	700	52,6	14s	2,2E+06	27	4,7h
150	645	1500	100,5	45s	--	--	--
300	1275	6000	231,8	12m	--	--	--
500	2150	10000	995,8	1,6 h	--	--	--

Eine SAT-Formel ist schwierig, wenn das Verhältnis Klauseln zu Variablen etwa 4,24 ist.

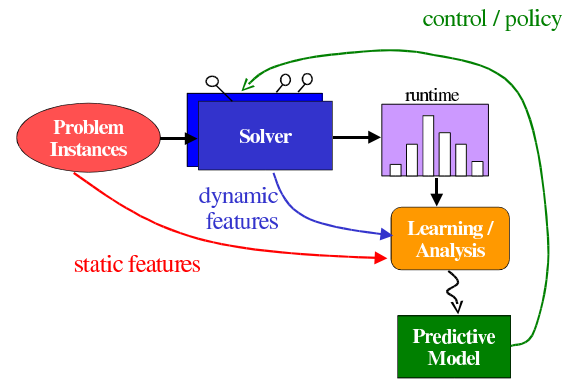
Randomisierung bei Davis-Putnam

- Branching-Heuristik kann randomisiert bestimmt werden
  - Die Laufzeit von Backtrack-basierten SAT-Solvern hängt stark von Branching-Heuristik ab
  - Addieren von Zufallswerten auf die Entscheidungswerte, um diese zu beeinflussen
- Random backtracking
  - Backtracking wird auch ausgeführt, wenn dies nicht zwingend notwendig ist

Randomisierte Restarts

- Wird von allen state-of-the-art SAT-Solvern verwendet
  - Grasp, Chaff, ...
- Gelernte Klauseln brauchen nicht immer gelöscht zu werden!

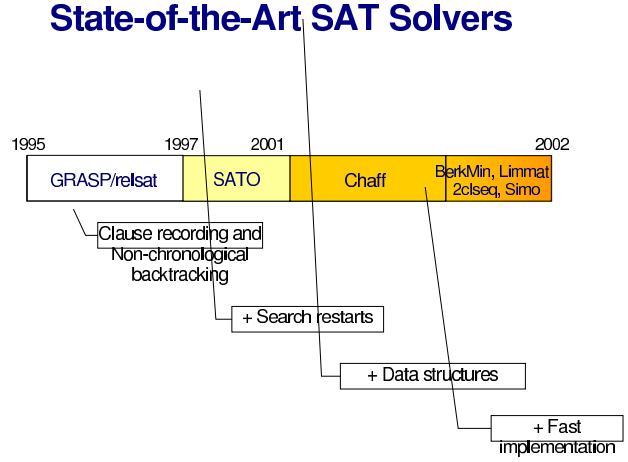
Gesteuerte Restarts



Search Restarts: Vollständigkeit

- Restarts können zu einem unvollständigen Verfahren führen
  - Nicht-Erfüllbarkeit kann nicht mehr gezeigt werden!
- Es ist meist sehr wichtig, ein vollständiges Verfahren zu haben!
- Vollständigkeit kann erzielt werden, wenn
  - Gelernte Klauseln behalten werden
  - Die Restarts immer seltener werden

State-of-the-Art SAT Solvers



Chaff

- Entstand nach genauer Analyse
  - Was dominiert die Laufzeit für eine gegebene Probleminstanz?
  - Beschleunige diesen Teil
  - Iteriere, bis alles in Balance ist
- Leitendes Prinzip: Laziness
  - Verzögere Berechnungen so lange wie möglich
- Source Code ist verfügbar unter http://www.ee.princeton.edu/~chaff/zchaff.php