ALBERT-LUDWIGS-
UNIVERSITÄT FREIBURG

INSTITUT FÜR INFORMATIK

Prof. Dr. Bernd Becker
Dipl. Inf. Ilia Polian

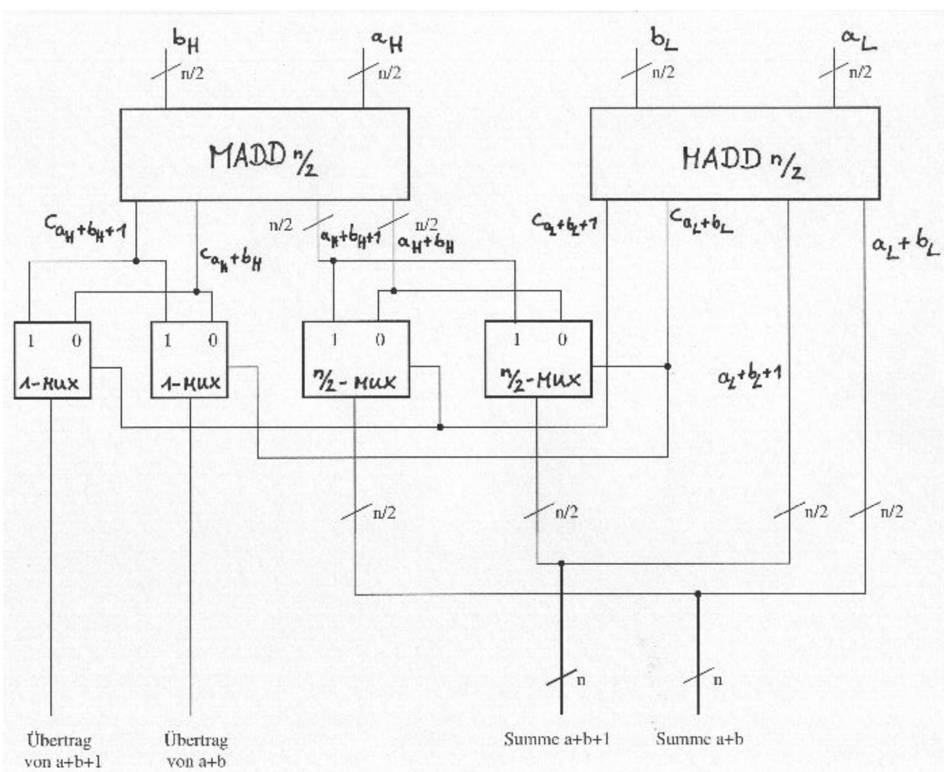
Freiburg, 15. Mai 2001

3. Übungsblatt zur Vorlesung

Technische Informatik II

Aufgabe 1

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass ein n-Bit Conditional-Sum Addierer CSA_n die Tiefe $depth(CSA_n) = O(log\ n)$ und die Kosten $C(CSA_n) = 10 \cdot n^{log\ 3} - 3n - 2$ besitzt. Im folgenden soll der Addierer so modifiziert werden, dass er bei gleichbleibender Tiefe nur noch Kosten von $O(n\ log\ n)$ verursacht. Hierzu werden anstelle von drei $CSA_{\frac{n}{2}}$ Blöcken nur noch zwei modifizierte Addierer-Zellen $MADD_{\frac{n}{2}}$ eingesetzt, die neben der Summe $a + b$ gleichzeitig noch die Summe $a + b + 1$ berechnen (für zwei $\frac{n}{2}$-Bit Zahlen a und b).
Eine Skizze des modifizierten, rekursiv aufgebauten n-Bit Conditional-Sum Addierers $MADD_n$ zeigt die nachfolgende Abbildung. Der einfachheithalber wird auf den Eingangsübertrag verzichtet und angenommen, dass n eine Zweierpotenz ist.



1.) Erläutern Sie die Funktionsweise des skizzierten Addierers.
2.) Entwerfen Sie eine $MADD_0$ Zelle, d.h. einen Schaltkreis, der für zwei einzelne Bits a, b die Summen $a + b$ und $a + b + 1$ berechnet.
3.) Zeigen Sie, dass sich die Kosten des modifizierten Addierers $MADD_n$ mit $O(n\ log\ n)$ abschätzen lassen.
4.) Welche Erweiterungen am $MADD_n$ Addierer sind für den Eingangsübertrag notwendig? Skizzieren Sie Ihren Schaltkreis.

Aufgabe 2

Sei eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben mit $f(1) = c$ und $f(n) = a \cdot f(\frac{n}{b}) + g(n)$ für alle $n = b^k$. Zeigen Sie, dass $\forall n = b^k$ gilt:

$$f(n) \;=\; a^{log_b\ n} \cdot c + \sum_{i=0}^{(log_b\ n)-1} a^i \cdot g(\tfrac{n}{b^i})$$

Hinweis: Induktion über k.

Aufgabe 3

Um den Carry-Lookahead Addierer zu realisieren, muss eine parallele Präfixberechnung durchgeführt werden. Hierzu ist in der Vorlesung der Operator

$$\circ : (\mathbb{B}_{2n})^2 \times (\mathbb{B}_{2n})^2 \to (\mathbb{B}_{2n})^2 \text{ mit}$$
$$(g_2, p_2) \circ (g_1, p_1) = (g_2 \vee (g_1 \wedge p_2), p_1 \wedge p_2)\ \forall g_1, p_1, g_2, p_2 \in \mathbb{B}_{2n}$$

eingeführt worden. Zeigen Sie, dass dieser Operator assoziativ ist.

Aufgabe 4

Zu einer Funktion $f : \mathbb{B}^k \to \mathbb{B}$, die von den Variablen $X_1, \ldots, X_k$ abhänge, sei die *Supportmenge* $supp(f)$ die Untermenge der Menge $\{X_1, \ldots, X_k\}$ von f mit folgender Eingenschaft:

$$\begin{aligned} X_i \in supp(f) \quad :\Longleftrightarrow \quad & \exists a_1, \ldots a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots a_k \in \mathbb{B} \\ & f(a_1, \ldots a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots a_k) \\ & \neq f(a_1, \ldots a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots a_k) \end{aligned}$$

für ein $i \in \{1, \ldots k\}$.
Beispiel: Für die Funktion $f : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ mit $f(a, b, c) = a \wedge c$ gilt $supp(f) = \{a, c\}$. Die Variable b ist also für die Funktion f „nicht wesentlich“.
Die Additionsfunktion $+_n$ kann man als $n + 1$ Funktionen

$$\begin{aligned} s_n : \mathbb{B}^{2n+1} &\to \mathbb{B} \\ s_{n-1} : \mathbb{B}^{2n+1} &\to \mathbb{B} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ s_1 : \mathbb{B}^{2n+1} &\to \mathbb{B} \\ s_0 : \mathbb{B}^{2n+1} &\to \mathbb{B} \end{aligned}$$

auffassen. Berechnen Sie für jede Funktion s_i die Supportmenge (als Untermenge von $\{a_{n-1}, \ldots, a_0, b_{n-1}, \ldots, b_0, c\}$).

Abgabetermin: 17.5.2001 in der jeweiligen Übungsgruppe oder im Kasten