Kernighan-Lin: maximale Vertauschungsanzahl

Linus F.

September 2011

Zusammenfassung

In der Fragestunde vor der Klausur wurde zum Kernighan-Lin-Algorithmus gefragt, ob es nicht ausreiche, pro Iteration immer nur die erste Hälfte aller Vertauschungen zu probieren, da die Kosten danach nicht mehr kleiner werden könnten. Dies ist für Partitionen mit jeweils 3 oder 4 Knoten pro Menge der Fall. Für Partitionen mit mehr Knoten lassen sich allerdings Gegenbeispiele konstruieren.

1 Partition mit 3 Knoten pro Menge

Bei einer Partition mit jeweils 3 Knoten pro Menge sind insgesamt 3 Vertauschungen pro Iteration möglich, bis die Partition wieder ihren Ausgangszustand mit gleichen Kosten erreicht hat, weil jeder der 3 Knoten nun in der anderen Menge ist. Die Behauptung ist, dass es reicht, sich die erste Vertauschung anzuschauen, da sich die Kosten danach nur noch verschlechtern. Beim Versuch, ein Gegenbeispiel zu konstruieren, findet man heraus, dass die Behauptung stimmt:

Angenommen, es gibt so eine Partition mit 3 Knoten pro Menge, wo das Kostenoptimum erst nach der 2. Vertauschung erreicht ist. Dann muss die 3. (letzte) Vertauschung die Kosten um einen Wert verschlechtern, der die Summe der Verbesserungen aus der 1. und 2. Vertauschung ist. Da das Optimum nach der 2. Vertauschung erreicht wird, müssen sich die Kosten bei der 2. Vertauschung noch verbessert haben. D.h. die Verbesserung bei der 1. Vertauschung ist kleiner als die Verschlechterung bei der 3. Vertauschung, welche ja die Summe von 1. und 2. Vertauschung ist.

Die Partition nach der 2. Vertauschung sieht aber gerade genauso aus, wie wenn man im Ausgangszustand als erstes die Knoten der 3. Vertauschung vertauscht hätte. Vom Ausgangszustand würde die Vertauschung dieser Knoten zu einer Verbesserung um den selben Wert führen, um den sich die Kosten bei der 3. Vertauschung sonst verschlechterten. Dieser Wert ist aber - wie oben gezeigt - größer als die Verbesserung der eigentlich 1. Vertauschung. Also wären die Knoten der eigentlich ersten Vertauschung gar nicht für diese ausgewählt worden, sondern gleich die der 3., wodurch das Optimum schon erreicht wäre.

Also kann es die angenommene Partition mit 3 Knoten pro Menge nicht geben, bei der das Optimum erst nach 2 Vertauschungen erreicht wäre!

2 Partition mit 4 Knoten pro Menge

Der Beweis geht äquivalent zu dem vorherigen: Angenommen, es gibt eine Partition mit 4 Knoten pro Menge, deren Kostenoptimum erst nach der 3. Vertauschung erreicht ist. Dann müsste auch hier die Verschlechterung bei der 4. (letzten) Vertauschung so groß sein wie die Verbesserung während der ersten 3 Vertauschungen. Folglich muss diese Verschlechterung größer sein als die Verbesserung bei der 1. Vertauschung. Weil die Partition nach der 3. Vertauschung genauso aussieht, wie wenn man vom Ausgangszustand her gleich die Knoten der 4. Vertauschung vertauscht hätte, wären diese gewählt worden und nicht die Knoten der vermeintlich 1. Vertauschung.

3 Partitionen mit 5 oder mehr Knoten pro Menge

Bei Partitionen mit 5 oder mehr Knoten pro Menge lässt sich der Beweis nicht mehr so führen wie oben. Stattdessen kann man Gegenbeispiele finden, wo bei n Knoten pro Menge immer $n-2$ Vertauschungen nötig sind, bis das Kostenoptimum gefunden wird. Siehe Abb. 1 und 2.

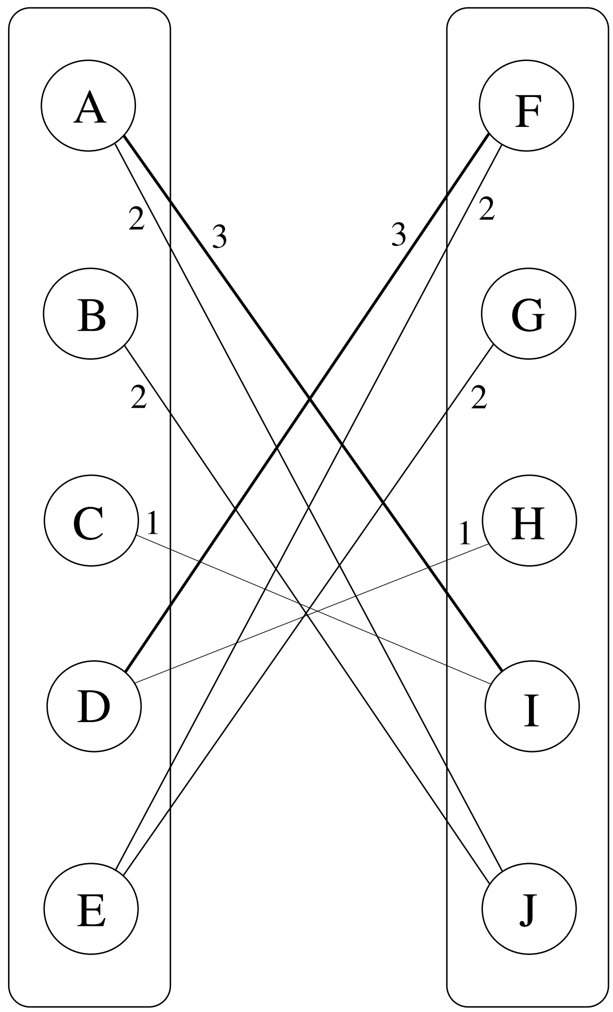

Abbildung 1: Eine Partition mit 5 Knoten pro Menge, deren Kostenoptimum der Kernighan-Lin-Algorithmus erst nach 3 Vertauschungen findet.

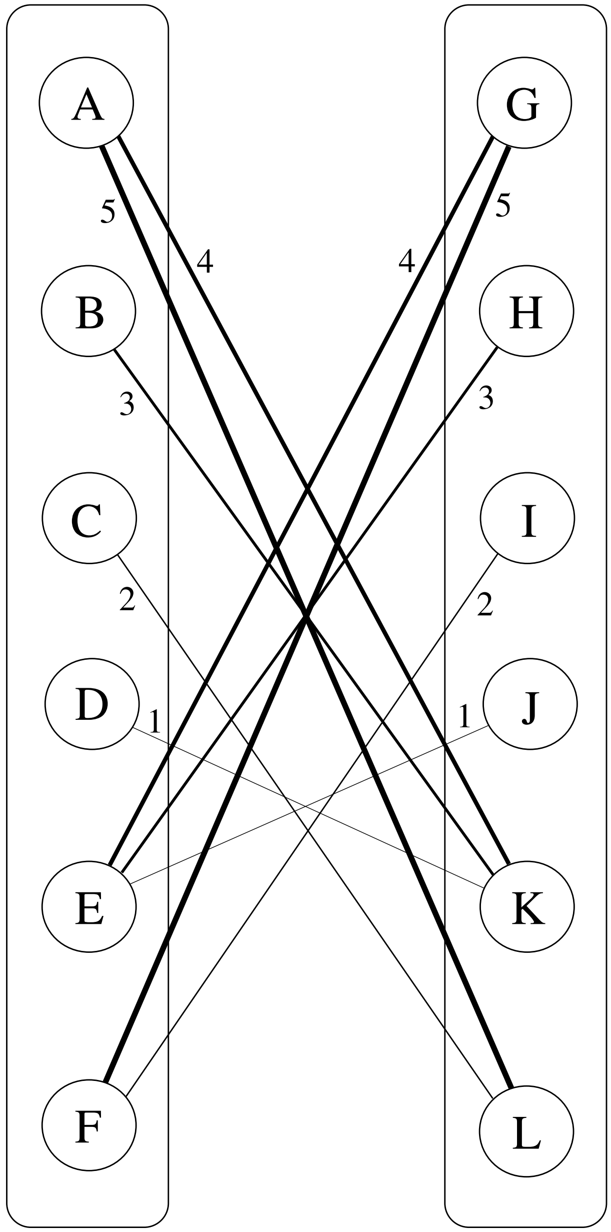

Abbildung 2: Eine Partition mit 6 Knoten pro Menge, deren Kostenoptimum der Kernighan-Lin-Algorithmus erst nach 4 Vertauschungen findet.